問題８

微分方程式 $p(x,y)\mathrm{d}x+q(x,y)\mathrm{d}y=0$ (1) が、$p(x,y)\mathrm{d}x+q(x,y)\mathrm{d}y=\mathrm{d}u(x,y)=0$ (2) と表せるとき、式(1)は完全であるといい、その解は次式で与えられる。

$$u(x,y)=\int p(x,y)\mathrm{d}x+\int\left[q(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int p(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y=c \qquad (3)$$

式(1)が完全でないとき、それに適当な関数 $\lambda(x,y)$ をかけた式

$$\lambda(x,y)p(x,y)\mathrm{d}x+\lambda(x,y)q(x,y)\mathrm{d}y \qquad (4)$$

が完全となる場合がある。このときの関数 $\lambda(x,y)$ を積分因子という。

以下の設問に答えよ。

（a） 式(1) が完全であるための条件は $\dfrac{\partial p(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial q(x,y)}{\partial x}$ であることを示せ。

（b） 微分方程式

$$y'+p(x)y=q(x) \qquad (5)$$

の積分因子は $e^{\int p(x)\mathrm{d}x}$ であることを示せ。

（c） 式(5)の一般解を求めよ。