偏微分方程式の解法

高木 洋平

大阪大学大学院基礎工学研究科

2014 年 4 月 17 日

小テスト (4 月 10 日) の解答

問題. 次の 2 階微分方程式の一般解を求めよ．

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

特性方程式を解く．

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0,\ (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$
$$\therefore \lambda = 2, 3$$

よって，求める一般解は，

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$$

線形偏微分方程式の型

- 2 階線形偏微分方程式，

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = g \qquad (1)$$

  の判別式 $D = b^2 - 4ac$ の正負によって以下のように分類する．
- $D = 0$: 放物型 (Parabolic) $\rightarrow$ 拡散方程式・熱伝導方程式
- $D > 0$: 双曲型 (Hyperbolic) $\rightarrow$ 波動方程式
- $D < 0$: 楕円型 (Elliptic) $\rightarrow$ ラプラス方程式

楕円型線形偏微分方程式の解法:1 次元熱伝導

図 1 のような温度 T_0 に保たれていた長さ L の金属棒を，時刻 $t=0$ において瞬間的に冷却して温度 $T_L(<T_0)$ とし，その後両端温度を T_L で一定に保つようにする．この場合の棒の長手方向温度分布の時間変化を求める．

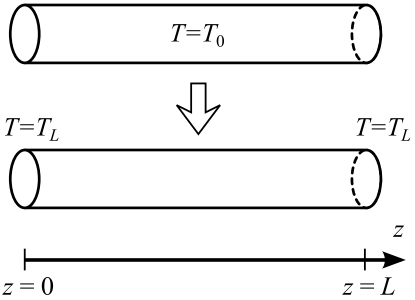

Figure : 1 次元熱伝導

1 次元熱伝導の支配方程式

時刻 t，位置 z での温度分布 $T(t, z)$ を求める微分方程式は以下のようになる．

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \tag{2}$$

ここで，α は熱拡散率であり，金属の物性値である．

この微分方程式の判別式は $D = 0$ であるから，放物型の偏微分方程式である．

無次元化

方程式を解く前に，各変数の無次元化を行う．

$$T^*(z*, t^*) = \frac{T - T_L}{T_0 - T_L}, z^* = \frac{z}{L}, t^* = \frac{at}{L^2} \tag{3}$$

式 (2) **に代入すると，**

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} = \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^{*2}} \tag{4}$$

この無次元化された微分方程式を解く．

変数分離法

T^* が独立変数 t^* の関数 $S(t^*)$ と z^* のみの関数 $Z(z^*)$ の積で表されるとする．すなわち，

$$T^*(t^*, z^*) = S(t^*)Z(z^*) \tag{5}$$

と書き表すことができる．

初期条件，境界条件

物理現象を表す偏微分方程式の解は，初期条件及び境界条件を満たさなければいけない．

- **初期条件** (Initial Condition, IC): **時刻** $t = 0$ **において満たす条件．**
- **境界条件** (Boundary Condition, BC): **対象領域の境界など特定の位置において満たす条件．**

	$T(t, z)$	$T^*(t^*, z^*) = S(t^*)$
I.C.	$T(0, z) = T_0$	$T^*(0, z^*) = S(t^*)Z(z^*) = 1$
B.C.1	$T(t, 0) = T_L$	$T^*(t^*, 0) = S(t^*)Z(0) = 0$
B.C.2	$T(t, L) = T_L$	$T^*(t^*, 1) = S(t^*)Z(1) = 0$

常微分方程式への分解

式 (5) を式 (2) に代入し，

$$\frac{\partial SZ}{\partial t^*} = \frac{\partial^2 SZ}{\partial {z^*}^2} \tag{6}$$

$$Z\frac{\partial S}{\partial t^*} = S\,\frac{\partial^2 Z}{\partial {z^*}^2} \tag{7}$$

$$\frac{1}{S}\frac{\partial S}{\partial t^*} = \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial {z^*}^2} \tag{8}$$

両辺が定数に等しければ定式が常に成り立つので，

$$\frac{1}{S}\frac{dS}{dt^*} = k, \quad \frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{d{z^*}^2} = k \tag{9}$$

一般解

$$\frac{1}{S}\frac{dS}{dt^*} = k \tag{10}$$

の一般解は，

$$S = C_1 e^{kt^*} \tag{11}$$

一般解及び境界条件の適用

$$\frac{1}{Z}\frac{dZ}{dz^{*2}} = k \tag{12}$$

は 2 階微分がもとの関数の定数倍であるから，

$$k > 0 \text{ のとき} \quad Z = C_2 \sinh \sqrt{k} z^* + C_3 \cosh \sqrt{k} z^* \tag{13}$$

$$k < 0 \text{ のとき} \quad Z = C_2 \sin \sqrt{-k} z^* + C_3 \cos \sqrt{-k} z^* \tag{14}$$

境界条件 $Z(0) = 0$，$Z(1) = 0$ を満たすのは，$k < 0$ で $C_3 = 0$ となる以下の場合のみである．

$$Z = C_2 \sin \sqrt{-k} z^* = C_2 \sin n\pi z^* \qquad (\sqrt{-k} = n\pi) \tag{15}$$

境界条件の適用

よって，次式で表される関数が偏微分方程式 (5) の解の一つであることがわかる．

$$
\begin{aligned}
T^*(t^*, z^*) &= SZ = C_1 e^{kt^*} C_2 \sin\sqrt{-k} z^* \\
&= A_n e^{-(n\pi)^2 t^*} \sin n\pi z^*
\end{aligned} \tag{16}
$$

ここで，$A_n = C_1 C_2$ とおいた．
この解をもとにして，初期条件を満たす関数を導出する．

初期条件の適用

重ね合わせの原理を利用し，複数の解の和をとることによって境界条件・初期条件を満たす解を導く．

式 (5) **は斉次形であるから重ね合わせの原理が成り立ち，式** (16) **で表される関数の線形結合である次の関数が初期条件を満たす解と置くことができる．**

$$T^*(t^*, z^*) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(n\pi)^2 t^*} \sin n\pi z^* \tag{17}$$

フーリエ正弦級数による表現

式 (17) は，$T^*(0, z^*)$ が関数 $f(z^*) = 1$ のフーリエ正弦級数となることを表している．ゆえに，A_n はフーリエ正弦係数となる．

$$A_n = 2\int_0^1 1 \cdot \sin n\pi z^* dz^* \tag{18}$$

以上より，境界条件・初期条件を満たす解は次のようになる．

$$T^*(t^*, z^*) = \sum_{n=1}^{\infty} 2\left(\int_0^1 \sin n\pi z^* dz^*\right) e^{-(n\pi)^2 t^*} \sin n\pi z^* \tag{19}$$

1 次元拡散方程式

十分に細長い管の中に存在する物質の濃度が一様に C_0 であるとする．この初期状態から，時刻 $t = 0$ において別の濃度 C_A の物質を表面 $(z = 0)$ に接した場合の，深さ z における物質濃度の時間変化 $C(t, z)$ を求める．物質の拡散係数は D とする．

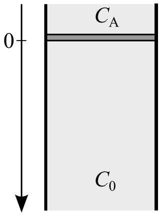

Figure : 1 次元物質拡散

非定常物質拡散は以下のような偏微分方程式で表現できる．

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \tag{20}$$

無次元化と初期条件・境界条件

物質濃度 C を以下のように無次元する．

$$c = \frac{C - C_0}{C_A - C_0} \tag{21}$$

この無次元濃度 c を用いると，式 (20) は以下のようになる．

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \tag{22}$$

初期条件・境界条件は以下のようになる．

- $t = 0$ のとき，$c = 0$
- $z = 0$ のとき，$c = 1$
- $z = \infty$ のとき，$c = 0$

変数変換法

偏微分方程式 (22) を解くために，変数変換法を用いてみる．まず，以下に示す新たな無次元量を導入する．

$$\eta = \frac{z}{\sqrt{4Dt}} \tag{23}$$

式 (22) の両辺は，

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{dc}{d\eta}\frac{d\eta}{dt} = \frac{dc}{d\eta}\left(-\frac{\eta}{2t}\right)$$

$$D\frac{\partial^2 c}{\partial z^2} = D\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial c}{\partial z}\right)\frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{d^2 c}{d\eta^2}\left(\frac{1}{4t}\right)$$

変数変換法

よって，偏微分方程式 (22) は次式の常微分方程式に変換される．

$$\frac{d^2c}{d\eta^2} + 2\eta\frac{dc}{d\eta} = 0 \tag{24}$$

このとき，初期条件と境界条件は以下のように変換される．

$$\eta = \infty \text{ のとき} \quad c = 0 \tag{25}$$

$$\eta = 0 \text{ のとき} \quad c = 1 \tag{26}$$

変数分離形への変換

さらに，$\zeta = dc/d\eta$ とおけば，式 (24) は以下の変数分離形に変換できる．

$$\frac{d\zeta}{d\eta} + 2\eta\zeta = 0 \tag{27}$$

これを解くと，

$$\zeta = \left(\frac{dc}{d\eta}\right) = A_1 e^{-\eta^2} \tag{28}$$

この式を η について積分し，c の一般解が求まる．

$$c = A_1 \int_0^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta + A_2 \tag{29}$$

境界条件の適用

境界条件 (26) より，$A_2 = 1$ であるから，

$$c = A_1 \int_0^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta + 1 \tag{30}$$

この式に境界条件 (25) を適用すると，ガウス積分を用いて積分定数 A_2 は以下のようになる．

$$A_1 = \frac{1}{\int_0^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \tag{31}$$

一次元物質拡散の特殊解

よって，無次元濃度 c の特殊解は以下のようになる．

$$c = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta \tag{32}$$

$\int_0^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta$ は誤差関数と呼ばれ，$\mathrm{erf}(\eta)$ と表記する．これを用いると，

$$c = \frac{C - C_0}{C_A - C_0} = 1 - \mathrm{erf}(\eta) = 1 - \mathrm{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{4Dt}}\right) \tag{33}$$

小テスト (4 月 17 日)

図に示すような一辺の長さ L の正方形の金属板 ABCD の辺 AB，BC，CD が低温 T_L に，辺 DA が高温 T_H に保たれている．定常状態における金属板内の温度分布 $T(x, y)$ は以下の偏微分方程式で与えられる．

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \qquad (34)$$

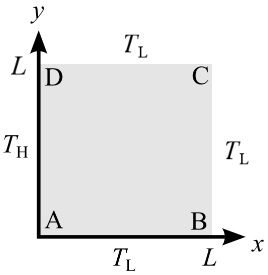

Figure : 2 次元熱伝導

(1) 無次元化せよ．
(2) 無次元後の境界条件を書き下しなさい．
(3) 変数分離法によって，二つの常微分方程式に分離せよ．
(4) (境界条件を考慮しないで) 一般解を求めよ．