微分方程式の種類，常微分方程式の解法

高木 洋平

大阪大学大学院基礎工学研究科

2014 年 4 月 10 日

微分の表記

- 1 **階微分**: $\frac{df}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$, f', $f'(x)$
- 2 **階微分**: $\frac{d^2 f}{dx^2}$, f'', $f''(x)$
- n **階微分**: $\frac{d^n f}{dx^n}$, $f^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$
- $f\big|_x$, $\left.\frac{df}{dx}\right|_y$, $\left.\frac{df}{dt}\right|_t$: **添字は位置または時刻におけるその関数の値を示す．**

基本的な関数の微分と積分

$f(x), \int g(x)dx$	$\frac{df(x)}{dt}, g(x)$
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

微分の定理

- **加減乗除**

$$\frac{d}{dx}(f+g) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx} \tag{1}$$

$$\frac{d}{dx}(fg) = f'g + fg' \tag{2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2} \tag{3}$$

微分の定理

- $z = g(y), y = f(x)$ の場合，

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} \tag{4}$$

- $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{dx/dy}, y = f(t), x = g(t)$ の場合,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \tag{5}$$

積分の定理

- **置換積分**

  $z = g(y), y = f(x)$ **の場合，**

$$\int g(y)dy = \int g(f(x))\frac{dy}{dx}dx \tag{6}$$

- **部分積分** $f(x), g(x)$ **について**

$$\frac{df}{dx} = f', \int g(x)dx = G(x) \tag{7}$$

とすると，

$$\int f(x)g(x)dx = fG - \int f'Gdx \tag{8}$$

級数展開

- **テイラー展開**

$$
\begin{aligned}
f(x+\Delta x) =& f(x) + \Delta x f'(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x) \\
&+ \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x) + \cdots + \frac{\Delta x^n}{n!} f^{(n)}(x) + \ldots
\end{aligned} \tag{9}
$$

- **マクローリン展開**

$$
\begin{aligned}
f(\Delta x) =& f(0) + \Delta x f'(0) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(0) \\
&+ \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(0) + \cdots + \frac{\Delta x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \ldots
\end{aligned} \tag{10}
$$

実用的な数値計算では有限の項で打ち切って評価することが多い．

微分方程式の種類

- 単一変数の関数で構成されている微分方程式を常微分方程式 (Ordinary Differential Equation, ODE) と呼ぶ．

$$F(t, x(t), x'(t), ..., x^{(n-1)}(t), x^{(n)}(t)) = 0 \tag{11}$$

  この方程式が複数あるときは連立常微分方程式となる．
- 複数変数の関数に関する偏微分を含む微分方程式を，偏微分方程式 (Partial Differential Equation, PDE) と呼ぶ．

常微分方程式の種類

- 線形常微分方程式は，

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1(t)\frac{dx}{dt} + a_0(t)x = b(t) \quad (12)$$

  のように書けて線形性が成り立つ．$b(t) = 0$ のときは斉次形と呼ぶ．

- 線形性が成り立たない，すなわち非線形な項を含む方程式を非線形常微分方程式と呼ぶ．

偏微分方程式の種類

- 常微分方程式と同様に線形・非線形に分けられる．
- 線形微分方程式の例:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{13}$$

- 非線形微分方程式の例:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{14}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 0 \tag{15}$$

線形偏微分方程式の型

- 2 階線形偏微分方程式，

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G \qquad (16)$$

の判別式 $D = B^2 - 4AC$ **の正負によって以下のように分類する．**

- $D = 0$: **放物型** (Parabolic)
- $D > 0$: **双曲型** (Hyperbolic)
- $D < 0$: **楕円型** (Elliptic)

常微分方程式の解法 (1 階微分方程式)

- **変数分離形**:

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \tag{17}$$

変形して，

$$g(y)dy = f(x)dx \tag{18}$$

両辺を積分して以下の一般解を得る．

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + C \tag{19}$$

常微分方程式の解法 (1 階微分方程式)

- **斉次線形:**

$$y' + P(x)y = 0 \tag{20}$$

変形して，

$$\frac{1}{y}dy = -P(x)dx \tag{21}$$

変数分離形なので解くことができる．

常微分方程式の解法 (1 階微分方程式)

- **非斉次線形**:

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{22}$$

一般解は次式のようになる．

$$y = \exp\left(-\int P(x)dx\right)\left\{\int \exp\left(\int P(x)dx\right)Q(x)dx + C\right\} \tag{23}$$

常微分方程式の解法 (2 階微分方程式)

- **定数係数斉次線形:**

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{24}$$

特性方程式 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ **の解を** α**，**β **としたとき，一般解は次のように与えられる．**

- α**，**β **が異なる実数のとき，**

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x} \tag{25}$$

- $\alpha = \beta$**(重根) のとき，**

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{\alpha x} \tag{26}$$

- α**，**β **が共役な虚数解** $p \pm qi$ **のとき，**

$$y = e^{px}(C_1 \cos qx + C_2 \sin qx) \tag{27}$$

常微分方程式の解法 (2 階微分方程式)

- **定数係数非斉次**:

$$y'' + ay' + by = R(x) \tag{28}$$

$y'' + ay' + by = 0$ **の一般解を** u**，** $y'' + ay' + by = R(x)$ **の一つの解を** y_1 **とすると，式** (28) **の一般解は，**

$$y = u + y_1 \tag{29}$$

常微分方程式の解法 (2 階微分方程式)

- **定数係数でない斉次線形**:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{30}$$

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ **の一つの解を** y_1 **とすると一般解は，**

$$y = C_1 y_1 \int \exp\left\{-\int P(x)dx\right\} y^{-2} dx + C_2 y_1 \tag{31}$$

常微分方程式の解法 (2 階微分方程式)

- **非線形 2 階微分方程式** (1):

$$y'' = f(x, y') \tag{32}$$

$y' = p$ **とおくと** $y'' = p'$ **より，** 1 **階微分方程式**
$p' = f(x, p)$ **が得られる．**

- **非線形 2 階微分方程式** (2):

$$y'' = f(y, y') \tag{33}$$

$y' = p$ **とおくと** $y'' = \frac{dp}{dx}p$ **であるから，** 1 **階微分方程式**
$p\frac{dp}{dy} = f(y, p)$ **が得られる．**

常微分方程式の解法 (n 階微分方程式)

- 定数係数斉次線形:

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0 \tag{34}$$

この方程式の解を $e^{\alpha x}$ と仮定して代入すると，

$$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \alpha + a_1 \alpha + a_0 = 0 \tag{35}$$

n 個の根 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ が全て異なるならば，$e^{\alpha_1 t}$, $e^{\alpha_2 t}$, $\cdots$,$e^{\alpha_n t}$ の全てが微分方程式の解となる．これらの解の線形結合，

$$y = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t} + C_3 e^{\alpha_3 t} + \cdots + C_n e^{\alpha_n t} \tag{36}$$

も一般解となる．

小テスト (4 月 9 日)

次の 2 階微分方程式の一般解を求めよ．

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$$